

«УТВЕРЖДАЮ»
Руководитель
ФГБНУ «Федеральный институт
педагогических измерений»



О.А. Решетникова
«10» ноября 2014 г.

«СОГЛАСОВАНО»
Председатель
Научно-методического совета
ФГБНУ «ФИПИ» по математике

А.Л. Семенов
«10» ноября 2014 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2015 года
по математике

Профильный уровень

Подготовлен Федеральным государственным бюджетным
научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Пояснения к демонстрационному варианту
контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2015 года
по МАТЕМАТИКЕ**

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме и уровне сложности. Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2015 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов — в кодификаторах элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2015 г. по математике.

Вариант состоит из двух частей и содержит 21 задание.

Часть 1 состоит из 9 заданий базового уровня сложности. Часть 2 содержит 12 заданий повышенного и высокого уровней сложности, проверяющих уровень профильной математической подготовки.

Задания 1–14 с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Задания 15–21 с развёрнутым ответом.

Правильное решение каждого из заданий 1–14 оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий 15, 16 и 17 оценивается 2 баллами; 18 и 19 — 3 баллами; 20 и 21 — 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 34 балла.

Верное выполнение не менее пяти заданий варианта КИМ отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования.

Структура варианта КИМ допускает проведение экзамена как по полному тексту, так и только по части 1 для проверки освоения базового уровня.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, предлагается одно из возможных решений. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

**Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
для проведения в 2015 году единого государственного экзамена
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 9 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 5 заданий повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–14 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

10	-	0	,	8													
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Бланк

При выполнении заданий 15–21 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Поезд отправился из Санкт-Петербурга в 23 часа 50 минут и прибыл в Москву в 7 часов 50 минут следующих суток. Сколько часов поезд находился в пути?

Ответ: _____.

2 На рисунке точками показана средняя температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки соединены линией. Определите по рисунку, сколько месяцев из данного периода средняя температура была больше 18 градусов Цельсия.



Ответ: _____.

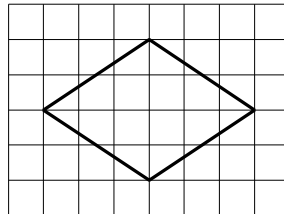
- 3 Строительный подрядчик планирует купить 20 тонн облицовочного кирпича у одного из трёх поставщиков. Один кирпич весит 5 кг. Цена кирпича и условия доставки всей покупки приведены в таблице.

Поставщик	Цена кирпича (руб. за 1 шт.)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	19	3000	Нет
Б	18	5000	Доставка бесплатная, если сумма заказа превышает 50 000 рублей
В	16	6500	При заказе товара на сумму свыше 50 000 рублей скидка на доставку 50%

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с учётом доставки?

Ответ: _____.

- 4 Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в см^2 .



Ответ: _____.

- 5 В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

Ответ: _____.

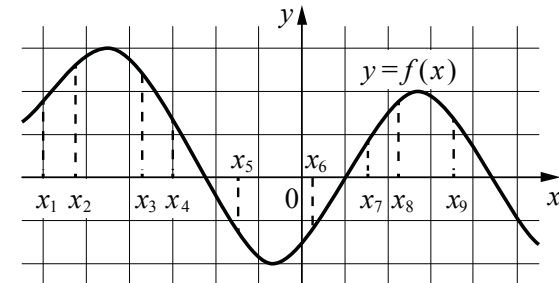
- 6 Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$.

Ответ: _____.

- 7 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Найдите угол BOC , если угол BAC равен 32° . Ответ дайте в градусах.

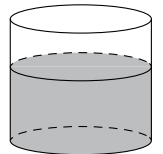
Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, \dots, x_9 . Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.



Ответ: _____.

- 9 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого? Ответ выразите в см.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Часть 2

- 10 Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: _____.

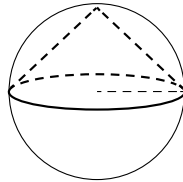
- 11 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде; f_0 — частота испускаемого сигнала (в МГц); f — частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: _____.

- 12 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



Ответ: _____.

- 13 Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Ответ: _____.

- 14 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 15 а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

- 16 Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.
а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

- 17 Решите неравенство $\frac{\log_9(2-x) - \log_{15}(2-x)}{\log_{15}x - \log_{25}x} \leq \log_{25}9$.

- 18 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

- 19 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

20 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

21 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Система оценивания
Ответы к заданиям 1–14**

Каждое из заданий 1–14 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

№ задания	Ответ
1	8
2	4
3	67 250
4	12
5	0,92
6	9
7	64
8	4
9	4
10	$-0,8$
11	751
12	20
13	5
14	-5

Решения и критерии оценивания заданий 15–21

Количество баллов, выставяемых за выполнение заданий 15–21, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

15

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение. а) Преобразуем обе части уравнения:

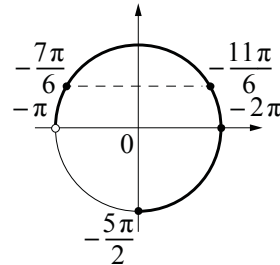
$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x; 2\sin^2 x - \sin x = 0; \sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.



Получаем числа: $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
 б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

Решение. а) Пусть точка H — середина AC . Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

С другой стороны,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M .

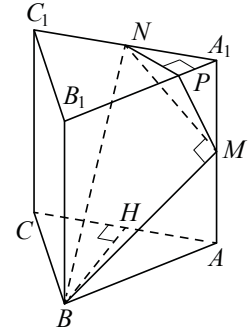
б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 . Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1 .

Прямая BM перпендикулярна MN , тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $\sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$.

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б	2
Выполнен только один из пунктов а и б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

17

Решите неравенство $\frac{\log_9(2-x) - \log_{15}(2-x)}{\log_{15}x - \log_{25}x} \leq \log_{25}9$.

Решение. Левая часть неравенства определена при $2-x > 0$; $x > 0$; $x \neq 1$.

При $0 < x < 1$ получаем $\log_{15}x < \log_{25}x$, $\log_9(2-x) > \log_{15}(2-x)$, поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9$.

При $1 < x < 2$ получаем $\log_{15}x > \log_{25}x$, $\log_9(2-x) < \log_{15}(2-x)$, поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9$.

Таким образом, решение исходного неравенства $(0; 1)$ и $(1; 2)$.

Ответ: $(0; 1); (1; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

18

Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

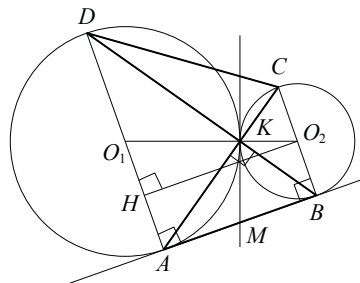
а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K , пересекает AB в точке M . По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB , у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD . Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.



Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H , равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1 :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Ответ: 3,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

19 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть сумма кредита равна a , ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют $k\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m=1+0,01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1=am-x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - (1+m+m^2)x = am^3 - \frac{m^3-1}{m-1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \frac{m^3-1}{m-1} \cdot x = 0$, откуда $x = \frac{am^3(m-1)}{m^3-1}$.

При $a=9\,930\,000$ и $k=10$, получаем: $m=1,1$ и

$$x = \frac{9\,930\,000 \cdot 1,331 \cdot 0,1}{0,331} = 3\,993\,000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для ежегодного платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу	2
С помощью верных рассуждений получено уравнение, из которого может быть найдено значение ежегодного платежа, но коэффициенты уравнение неверные из-за ошибки в вычислениях	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

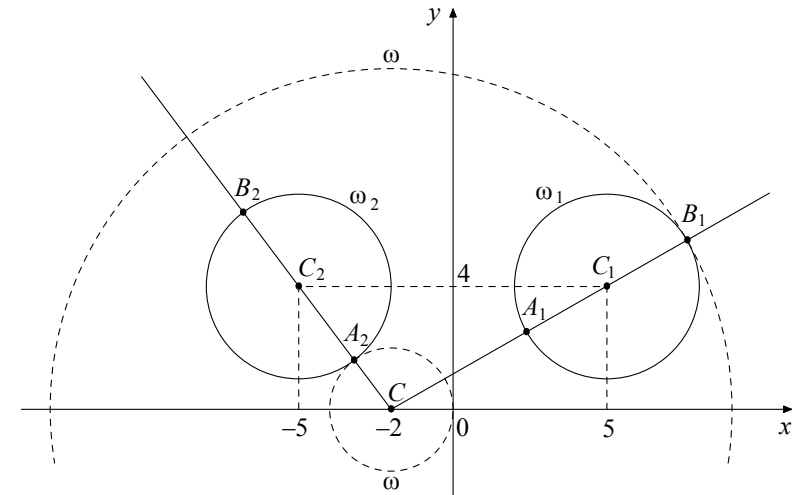
20 Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x-5|)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x-5|)^2 + (y-4)^2 = 9$ задаёт окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5; 4)$ радиуса 3, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5; 4)$ того же радиуса (см. рис.).

При положительных значениях a уравнение $(x+2)^2 + y^2 = a^2$ задаёт окружность ω с центром в точке $C(-2; 0)$ радиуса a . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .



Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 . Так как $CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, то $CA_1 = \sqrt{65} - 3$, $CB_1 = \sqrt{65} + 3$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как $CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5$, то $CA_2 = 5 - 3 = 2$, $CB_2 = 5 + 3 = 8$.

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 2$ и $a = \sqrt{65} + 3$.

Ответ: 2; $\sqrt{65} + 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

21 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$: $4k - 8l = -132$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \leq 44$, получаем: $3l - 33 \leq 44$; $3l \leq 77$; $l \leq 25$; $k = 2l - 33 \leq 17$, то есть положительных чисел не более 17.

Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два раза написан 0. Тогда $\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = -3$; указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — в пункте в приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минобрнауки России от 26.12.2013 г. №1400 зарегистрирован Минюстом России 03.02.2014 г. № 31205),

«61. По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развёрнутым ответом...»;

«62. В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

1) Работа участника ЕГЭ направляется на третью проверку, если расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий, составляет 2 и более баллов.

В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, которое было оценено двумя экспертами со столь существенным расхождением.

2) Работа участника ЕГЭ направляется на третью проверку, при наличии расхождений хотя бы в двух заданиях.

В этом случае третий эксперт перепроверяет ответы на все задания работы.